数理解析研究所講究録
1119 巻 1999 年 158-170

Spinor-Valued and Clifford Algebra-Valued Harmonic Polynomials

早稲田大学理工学研究科 本間 泰史 (Yasushi Homma)*

概 要

$\mathbf{R}^n$ 上の spinor-valued harmonic polynomials 及び Clifford algebra-valued harmonic polynomials を幾何学的に分解する. また, harmonic polinomials に対する spinor complex, de Rham complex を定義し, それらが完全系列であることを示す.

1 球面調和多項式

$n-1$ 次元球面 S^{n-1} 上の関数の空間 $L^2(S^{n-1},\mathbf{C})$ は $\mathbf{R}^n$ 上の球面調和多項式全体 (harmonic polynomials) と同一視できることは, よく知られている.

$\mathbf{R}^n$ 上の q 次多項式全体を S^q とする, つまり

$$S^q := \left\{f(x) \in \mathbf{C}[x_1,\cdots,x_n] \;\middle|\; \deg f = q\right\}, \tag{1.1}$$

ここで $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in \mathbf{R}^n$. この空間に作用する Laplace 作用素を $\Box$ とする:

$$\Box = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 : S^q \to S^{q-2}. \tag{1.2}$$

このとき q 次球面調和多項式全体 H^q とは, $\Box$ の kernel である. すなわち

$$H^q = \ker\Box \quad \text{on} \quad S^q. \tag{1.3}$$

また, $S^q = H^q \oplus |x|^2 S^{q-2}$ が成立する.

以上のもとで, 次の同型が成立:

$$L^2(S^{n-1},\mathbf{C}) \simeq \sum_{q\geq 0} H^q. \tag{1.4}$$

**E-mail address*: 696m5121@mn.waseda.ac.jp

さらに$n-1$次元球面S^{n-1}は対称空間としては, $SO(n)/SO(n-1)$または$Spin(n)/Spin(n-1)$であり, $L^2(S^{n-1},\mathbf{C})$及びH^qは$Spin(n)$の表現空間となるのだが, 上の同型は$Spin(n)$の表現としての既約分解を与える.

さて, 上の考えを球面上のスピノール束$\mathbf{S}(S^{n-1})$, クリフォード束$\mathbf{C}l(S^{n-1})$へ一般化しよう. つまり, $\mathbf{S}(S^{n-1})$及び$\mathbf{C}l(S^{n-1})$のsection全体をそれぞれ$\mathbf{R}^n$上のスピノール値調和多項式及びクリフォード代数値調和多項式と同一視する. これを行うために次の章ではこれら二つの束の (globalな) 自明化を与える.

2 Trivializations of Bundles on S^{n-1}

スピノール束及びクリフォード束はどちらも主スピン束の同伴束である. そこで, スピン群$Spin(n)$のいくつかの表現を調べよう.

$\mathbf{R}^n$から導かれる (複素) クリフォード代数を$\mathbf{C}l_n$とすると, スピン群$Spin(n)$は$\mathbf{C}l_n$に埋め込める. より詳しく言うと, $\{e_k\}_{k=1}^n$を$\mathbf{R}^n$の標準的な基底としたとき, $Spin(n)$のリー環$\mathfrak{spin}(n)$は

$$\mathfrak{spin}(n) := \mathbf{R}\{e_k e_l\}_{k<l} \subset \mathbf{C}l_n \tag{2.1}$$

となり, よって$Spin(n)$は

$$Spin(n) := \exp \mathfrak{spin}(n) \subset \mathbf{C}l_n \tag{2.2}$$

となる. そこで次の$Spin(n)$の表現$(Ad_n, \mathbf{C}l_n)$が考えられる:

$$Spin(n) \times \mathbf{C}l_n \ni (g,\psi) \mapsto Ad_n(g)\psi = g\psi g^{-1} \in \mathbf{C}l_n. \tag{2.3}$$

ただしこの表現は既約ではなく, クリフォード代数と (複素) 外積代数の同型,

$$\mathbf{C}l_n \ni e_{k_1}e_{k_2}\cdots e_{k_p} \mapsto e_{k_1}\wedge e_{k_2}\wedge\cdots\wedge e_{k_p} \in \sum_p \Lambda^p_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^n), \tag{2.4}$$

を用いれば, 各pに対し$\Lambda^p_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^n)$が既約表現となる (正確には, $n=2m$かつ$p=m$の時は既約でなく, $\Lambda^m_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^{2m})$は二つの非同値な既約表現に分解される) . また, 既約な$\mathbf{C}l_n$加群を(ρ_n, W_n)とするとき, これを$Spin(n)$に制限するとスピノール表現$(\Delta_n, W_n) := (\rho_n|_{Spin(n)}, W_n)$を得る. nが偶数 ($n=2m$) の場合はこの表現は互いに同値でない既約表現らに分解する:

$$(\Delta_{2m}, W_{2m}) \simeq (\Delta^+_{2m}, W^+_{2m}) \oplus (\Delta^-_{2m}, W^-_{2m}). \tag{2.5}$$

nが奇数 ($n=2m+1$) の場合は$(\Delta_{2m+1}, W_{2m+1})$は既約表現である.

さて, 球面S^{n-1}の主スピン束は

$$\begin{array}{ccc} Spin(n) & \curvearrowleft & Spin(n-1) \\ \pi \big\downarrow & & \\ S^{n-1} & \simeq & Spin(n)/Spin(n-1) \end{array} \tag{2.6}$$

となる. ここで $Spin(n-1)$ の $Spin(n)$ への埋め込みは $\mathbf{R}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ から自然に導かれたものとする. このとき球面上のクリフォード束 $\mathbf{C}l(S^{n-1})$, スピノール束 $\mathbf{S}(S^{n-1})$ は

$$\mathbf{C}l(S^{n-1}) := Spin(n) \times_{Ad_{n-1}} \mathbf{C}l_{n-1}, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{S}(S^{n-1}) := Spin(n) \times_{\Delta_{n-1}} W_{n-1} \tag{2.8}$$

となる. これらの束の自明化を与えるには次の補題が必要である.

補題 2.1 ([8]). $Spin(n-1)$ の表現として, 次の同型が成立する.

1. (クリフォード代数の場合)

$$(Ad_{n-1}, \mathbf{C}l_{n-1}) \simeq (Ad_n|_{Spin(n-1)}, \mathbf{C}l_n^i) \quad for \quad i = 0, 1. \tag{2.9}$$

ここで $\mathbf{C}l_n^i$ は $\mathbf{C}l_n$ の *even-odd* 分解である:

$$\mathbf{C}l_n = \mathbf{C}l_n^0 \oplus \mathbf{C}l_n^1. \tag{2.10}$$

2. (スピノールの場合)

$$(\Delta_{2m-1}, W_{2m-1}) \simeq (\Delta_{2m}^{\pm}|_{Spin(2m-1)}, W_{2m}^{\pm}), \tag{2.11}$$

$$(\Delta_{2m}, W_{2m}) \simeq (\Delta_{2m+1}|_{Spin(2m)}, W_{2m+1}). \tag{2.12}$$

この補題によりクリフォード束は $\mathbf{C}l(S^{n-1}) = Spin(n) \times_{Ad_n} \mathbf{C}l_n^i$ となり自明化を与えることができる (well-defined であることを確かめよ) :

$$Spin(n) \times_{Ad_n} \mathbf{C}l_n^i \ni [g, \psi] \mapsto (\pi(g), g\psi g^{-1}) \in S^{n-1} \times \mathbf{C}l_n^i. \tag{2.13}$$

よって section の空間 $\Gamma(S^{n-1}, \mathbf{C}l(S^{n-1}))$ は $C^\infty(S^{n-1}, \mathbf{C}l_n^i) \simeq \sum_{q \geq 0} H^q \otimes \mathbf{C}l_n^i$ と同一視される. また $Spin(n)$ の $C^\infty(S^{n-1}, \mathbf{C}l_n^i)$ への作用は

$$Spin(n) \times C^\infty(S^{n-1}, \mathbf{C}l_n^i) \ni (g_0, \psi(x)) \mapsto g_0 \psi(g_0^{-1} x g_0) g_0^{-1} \in C^\infty(S^{n-1}, \mathbf{C}l_n^i). \tag{2.14}$$

となることがわかり, $Spin(n)$ の $\sum H^q \otimes \mathbf{C}l_n^i$ への表現 (テンソル表現) と同値である. スピノール束の場合も同様であり, 次の命題を得る.

命題 2.2. $Spin(n)$ の表現空間として以下の同型が成立する:

1. (クリフォード束の場合)

$$L^2(S^{n-1}, \mathbf{C}l(S^{n-1})) \simeq \sum_{q \geq 0} H^q \otimes \mathbf{C}l_n^i \quad for\ i = 0, 1. \tag{2.15}$$

2. （スピノール束の場合）

$$L^2(S^{2m},\mathbf{S}(S^{2m}))\simeq\sum_{q\geq 0}H^q\otimes W_{2m+1}, \tag{2.16}$$

$$L^2(S^{2m-1},\mathbf{S}(S^{2m-1}))\simeq\sum_{q\geq 0}H^q\otimes W_{2m}^{\pm}. \tag{2.17}$$

このように,球面上のクリフォード束及びスピノール束の section の空間を調べるには, $\mathbf{R}^n$ 上のクリフォード代数値調和多項式 $\sum H^q\otimes \mathbf{Cl}_n$ 及びスピノール値調和多項式 $\sum H^q\otimes W_n$ を調べればよいことになる.以下の章では $H^q\otimes \mathbf{C}l_n$ や $H^q\otimes W_n$ を幾何学的に分解していく.

3 Spinor-valued harmonic polynomials

まずスピノール値調和多項式から調べていこう. $\mathbf{R}^n$ 上のスピノール値調和多項式を分解するにはディラック作用素 D を用いるのが自然であろう.なぜなら $Spin(n)$ の作用とディラック作用素が可換だからである. スピノール値多項式 $\sum S^q\otimes W_n$ に働くディラック作用素 D は

$$D=\sum_{k=1}^{n}e_k\frac{\partial}{\partial x_k}:S^q\otimes W_n\to S^{q-1}\otimes W_n. \tag{3.1}$$

である.この時 $D^2=\square$ に注意.また $S^q\otimes W_n$ での D の kernel を $\ker_q D\subset H^q\otimes W_n$ と書くことにする.

さて多項式の空間 $\sum S^q$ には次の内積を入れておく

$$(f(x),g(x)):=(\sum f_\alpha x^\alpha,\sum g_\beta x^\beta)=\sum f_\alpha g_\beta\partial_\alpha x^\beta=\sum\alpha! f_\alpha g_\alpha. \tag{3.2}$$

ここで $f(x)=\sum f_\alpha x^\alpha$ と $g(x)=\sum g_\beta x^\beta$ は $\sum S^q$ の元である.さらにスピノール空間 W_n には $(e_kv,e_kw)=(v,w)$ $(e_k\in\mathbf{R}^n)$ が成立するように内積を入れることが出来る.よってこれらのテンソル積を考えて $\sum S^q\otimes W_n$ 及び $\sum H^q\otimes W_n$ には次を満たすような内積を入れることが出来る:

$$(D\phi,\phi')=-(\phi,x\phi'). \tag{3.3}$$

ここで x はクリフォード積 $\sum x_ke_k$,

$$x=\sum_{k=1}^{n}x_ke_k:S^q\otimes W_n\to S^{q+1}\otimes W_n, \tag{3.4}$$

である.このようにディラック作用素 D の dual は代数的作用素 x になる.我々はこの二つの作用素を使って $H^q\otimes W_n$ を分解していくのであるが,そのためには,まず D と x の関係式が必要である.

補題 3.1. *ディラック作用素 D, ラプラス作用素 $\Box$, 及び代数的作用素 x は次を満たす:*

$$Dx + xD = -n - 2r\frac{\partial}{\partial r}, \tag{3.5}$$

$$\Box x - x\Box = -2D, \tag{3.6}$$

$$Dr\frac{\partial}{\partial r} - r\frac{\partial}{\partial r}D = D. \tag{3.7}$$

ここで $r = |x|$ であり作用素 $r\frac{\partial}{\partial r} = \sum x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ は多項式の次数を測る作用素である.

つぎに調和多項式スピノール複体 (spinor complex for harmonicpolynomials) を考える. すなわち

$$\cdots \xrightarrow{D} H^{q+1} \otimes W_n \xrightarrow{D} H^q \otimes W_n \xrightarrow{D} H^{q-1} \otimes W_n \xrightarrow{D} \cdots. \tag{3.8}$$

この微分複体が well-defined であることは容易に確かめられる. さらに次の命題が成立

命題 3.2 ([10]). 調和多項式スピノール複体は完全系列である. また次が成立する:

$$\dim \ker_q D = 2^{[\frac{n}{2}]}\binom{n+q-2}{q}. \tag{3.9}$$

Proof. まず ϕ を $\ker_q D$ の元とすると, 上の補題から $x\phi$ が $D(x\phi) = (-n-q)\phi$ 及び $\Box(x\phi) = 0$ を満たすことがわかり完全性が示せる. さらに完全性により

$$\dim \ker_q D = \sum_{m=0}^{q}(-1)^m \dim H^{q-m} \otimes W_n. \tag{3.10}$$

であるので

$$\dim H^q = \frac{(n+q-3)!}{q!(n-2)!}(n+2q-2), \tag{3.11}$$

$$\dim W_n = 2^{[\frac{n}{2}]}, \tag{3.12}$$

を使って数学的帰納法により $\ker_q D$ の次元が求まる. ■

この命題の証明をみればわかるように $H^q \otimes W_n$ は $\ker_q D \oplus x(\ker_{q-1} D)$ と分解される. また内積の入れ方から, これは直交直和分解である.

定理 3.3 ([10]). *$H^q \otimes W_n$ は $\ker_q D$ と $x(\ker_{q-1} D)$ の和に分解される:*

$$H^q \otimes W_n = \ker_q D \oplus x(\ker_{q-1} D). \tag{3.13}$$

さて $n=2m$ の場合はさらに分解できる. まず $\mathbf{R}^{2m}$ 上のディラック作用素は次のようになる:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

ここで $D^\pm$ は $S^q \otimes W_{2m}^\pm$ から $S^{q-1} \otimes W_{2m}^\mp$ への写像である. 同様に代数的作用素 x も分解され,

$$x = \begin{pmatrix} 0 & x^- \\ x^+ & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

このとき, 次を得る.

系 3.4. $H^q \otimes W_{2m}^\pm$ は $\ker_q D^\pm$ と $x^\mp(\ker_{q-1} D^\mp)$ の和に直交直和分解される:

$$H^q \otimes W_{2m}^\pm = \ker_q D^\pm \oplus x^\mp(\ker_{q-1} D^\mp). \tag{3.16}$$

また $\ker_q D^\pm$ の次元は

$$\dim\ker_q D^\pm = 2^{m-1}\binom{2m+q-2}{q}. \tag{3.17}$$

4 Clifford algebra-valued harmonic polynomials

この章ではクリフォード代数値調和多項式を分解する. 2 章で見たように $\mathbf{C}l_n \simeq \sum \Lambda^p$ であるので, $H^q \otimes \mathbf{C}l_n$ の代わりに $H_p^q := H^q \otimes \Lambda^p$ (外積代数値調和多項式) について調べよう. ここで Λ^p は $\Lambda_{\mathbf{C}}^p(\mathbf{R}^n)$ のこと.

まず $\sum \Lambda^p$ には次の作用素がある:

$$e_{k\wedge} : \Lambda^p \to \Lambda^{p+1}, \tag{4.1}$$
$$i(e_k) : \Lambda^p \to \Lambda^{p-1}. \tag{4.2}$$

ここで $\{e_k\}_k$ は $\mathbf{R}^n$ の標準基底であり, $e_{k\wedge}$ は外積, $i(e_k)$ は内部積を表している. これらを使って前の章の D や x に対応するものとして次のような作用素を得る.

$$d := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} e_{k\wedge} : S_p^q \to S_{p+1}^{q-1}, \tag{4.3}$$

$$d^* := -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} i(e_k) : S_p^q \to S_{p-1}^{q-1}, \tag{4.4}$$

$$x_\wedge := \sum_{k=1}^{n} x_k e_{k\wedge} : S_p^q \to S_{p+1}^{q+1}, \tag{4.5}$$

$$i(x) := \sum_{k=1}^{n} x_k i(e_k) : S_p^q \to S_{p-1}^{q+1}, \tag{4.6}$$

$$\Box := dd^* + d^*d = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} : S_p^q \to S_p^{q-2}, \tag{4.7}$$

ここで $S^q \otimes \Lambda^p$（q 次多項式 p-form）を S_p^q と表している．また，q 次調和多項式 p-form $H^q \otimes \Lambda^p$ を H_p^q と書くことにする．これらの作用素の関係式を調べると，

補題 4.1.

$$d^2 = d^{*2} = (x_\wedge)^2 = i(x)^2 = 0, \tag{4.8}$$

$$dx_\wedge + x_\wedge d = 0, \quad d^*i(x) + i(x)d^* = 0, \tag{4.9}$$

$$di(x) + i(x)d = r\frac{\partial}{\partial r} + L, \quad d^*x_\wedge + x_\wedge d^* = -r\frac{\partial}{\partial r} - n + L, \tag{4.10}$$

$$\Box x_\wedge - x_\wedge \Box = -2d, \quad \Box i(x) - i(x)\Box = 2d^*, \tag{4.11}$$

$$\Box x_\wedge i(x) - x_\wedge i(x)\Box = 2x_\wedge d^* + 2i(x)d - 2r\frac{\partial}{\partial r} - 2L, \tag{4.12}$$

$$\Box i(x)x_\wedge - i(x)x_\wedge\Box = -2x_\wedge d^* - 2i(x)d - 2r\frac{\partial}{\partial r} - 2n - 2L, \tag{4.13}$$

$$\Box d = d\Box, \quad \Box d^* = d^*\Box \tag{4.14}$$

ここで作用素 L は $L := \sum e_{k\wedge} i(e_k)$ であり，微分形式の次数を測るものである．つまり L は S_p^q に対して $p \cdot id$ で作用する．

スピノールの場合と同様に，$\sum S_p^q$ に以下を満たす内積を導入できる：

$$(d\psi, \psi') = (\psi, i(x)\psi') \quad \text{and} \quad (d^*\psi, \psi') = -(\psi, x_\wedge \psi'). \tag{4.15}$$

つまり d 及び d^* の adjoint が，それぞれ $i(x)$ 及び $-x_\wedge$ になる．

さて，スピノールの場合のように調和多項式ド・ラーム複体（de Rham complex for harmonic polynomials）を考える：

$$0 \xrightarrow{d} H_0^q \xrightarrow{d} H_1^{q-1} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} H_n^{q-n} \xrightarrow{d} 0, \tag{4.16}$$

$$0 \xrightarrow{d^*} H_n^q \xrightarrow{d^*} H_{n-1}^{q-1} \xrightarrow{d^*} \cdots \xrightarrow{d^*} H_0^{q-n} \xrightarrow{d^*} 0. \tag{4.17}$$

これら微分複体が完全系列であることを示したいのであるが，スピノールの場合と異なり，簡単ではない．例えば ψ を H_p^{q-p} の元で $d\psi = 0$ を満たすとしよう．このとき，$di(x)\psi = q\psi$ は成立するが $i(x)\psi$ が調和であるとは限らない．なぜなら $\Box i(x)\psi = (i(x)\Box + d^*)\psi = d^*\psi$ となってしまうからである．そこで，H_p^q の分解を先に与えてから（定理 4.5），完全性を証明する（系 4.6）．

H_p^q の分解を与えるために S_p^q を出来るだけ分解していく. そこで次の複体を考える:

$$0 \xrightarrow{d} S_0^q \xrightarrow{d} S_1^{q-1} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} S_n^{q-n} \xrightarrow{d} 0, \tag{4.18}$$
$$0 \xrightarrow{d^*} S_n^q \xrightarrow{d^*} S_{n-1}^{q-1} \xrightarrow{d^*} \cdots \xrightarrow{d^*} S_0^{q-n} \xrightarrow{d^*} 0, \tag{4.19}$$
$$0 \xrightarrow{x_\wedge} S_0^q \xrightarrow{x_\wedge} S_1^{q+1} \xrightarrow{x_\wedge} \cdots \xrightarrow{x_\wedge} S_n^{q+n} \xrightarrow{x_\wedge} 0, \tag{4.20}$$
$$0 \xrightarrow{i(x)} S_n^q \xrightarrow{i(x)} S_{n-1}^{q+1} \xrightarrow{i(x)} \cdots \xrightarrow{i(x)} S_0^{q+n} \xrightarrow{i(x)} 0. \tag{4.21}$$

命題 4.2. 上の 4 つの複体はすべて完全系列である. また

$$\dim \ker_p^q d = \binom{n+q}{p+q}\binom{p+q-1}{p-1} \quad \textit{for} \quad p \neq 0, \tag{4.22}$$
$$\dim \ker_p^q d^* = \binom{n+q}{p}\binom{n+q-p+1}{q} \quad \textit{for} \quad p \neq n, \tag{4.23}$$
$$\dim \ker_0^q d = \dim \ker_n^q d^* = 1. \tag{4.24}$$

ここで $\ker_q^p d$ 及び $\ker_q^p d^*$ は, それぞれ d 及び d^* の S_q^p における *kernel* を表す.

証明は補題 4.1 から従う. この命題から次の系を得る.

系 4.3. q 次多項式 *p-form* S_p^q は次のように分解できる:

$$S_p^q = \ker_p^q d \oplus \ker_p^q i(x) \tag{4.25}$$
$$= \ker_p^q d^* \oplus \ker_p^q x_\wedge \tag{4.26}$$
$$= \ker_p^q d \cap \ker_p^q d^* \oplus \ker_p^q x_\wedge \oplus \ker_p^q i(x). \tag{4.27}$$

ここで $\ker_p^q d$ 及び $\ker_p^q d^*$ は, それぞれ $\ker_p^q i(x)$ 及び $\ker_p^q x_\wedge$ に直交している. また $\ker_p^q d \cap \ker_p^q d^*$ の次元は

$$\dim \ker_p^q d \cap \ker_p^q d^* = \frac{(n+q-1)!}{(n-p-1)!(p-1)!q!}\frac{n+2q}{(p+q)(n+q-p)}. \tag{4.28}$$

Proof. 初めの二つの分解は命題 4.2 から従う. 三番目の分解 (4.27) を証明しよう. $\ker_p^q d \cap \ker_p^q d^*$ の直交補空間を考える,

$$\begin{aligned}(\ker_p^q d \cap \ker_p^q d^*)^\perp &= (\ker_p^q d)^\perp + (\ker_p^q d^*)^\perp \\ &= \ker_p^q i(x) + \ker_p^q x_\wedge.\end{aligned} \tag{4.29}$$

また $\ker_p^q i(x) \cap \ker_p^q x_\wedge = 0$ が言える. なぜなら

$$x_\wedge i(x) + i(x) x_\wedge = |x|^2 = r^2 \tag{4.30}$$

であり r^2 が単射だからである. よって $\ker_p^q i(x) + \ker_p^q x_\wedge = \ker_p^q i(x) \oplus \ker_p^q x_\wedge$ となり (4.27) が示せた. 次元は

$$\dim \ker_p^q d \cap \ker_p^q d^* = \dim \ker_p^q d + \dim \ker_p^q d^* - \dim S_p^q \tag{4.31}$$

から従う. ■

さて $\ker_p^q d \cap \ker_p^q d^*$ を I_p^q と書くことにする（これは H_p^q の部分空間であることに注意）. S_p^q の残りの空間 $\ker_p^q x_\wedge$ 及び $\ker_p^q i(x)$ をさらに分解して調和となる部分を取り出そう.

$$\begin{aligned}\ker_p^q x_\wedge &= x_\wedge(S_{p-1}^{q-1}) \\ &= x_\wedge(I_{p-1}^{q-1}) \oplus x_\wedge(\ker_{p+1}^{q-1} x_\wedge) \oplus x_\wedge(\ker_{p-1}^{q-1} i(x)) \\ &= x_\wedge I_{p-1}^{q-1} \oplus x_\wedge(\ker_{p-1}^{q-1} i(x)),\end{aligned} \tag{4.32}$$

ここで $x_\wedge$ は I_{p-1}^{q-1} 及び $\ker_{p-1}^{q-1} i(x)$ 上で単射である. 同様に

$$\ker_p^q i(x) = i(x) I_{p+1}^{q-1} \oplus i(x)(\ker_{p+1}^{q-1} x_\wedge). \tag{4.33}$$

もちろん, $i(x)$ は I_{p+1}^{q-1} 及び $\ker_{p+1}^{q-1} x_\wedge$ 上で単射である. さらに $x_\wedge(\ker_{p-1}^{q-1} i(x)), i(x)(\ker_{p+1}^{q-1} x_\wedge)$ を分解して

$$x_\wedge(\ker_{p-1}^{q-1} i(x)) = x_\wedge i(x) I_p^{q-2} \oplus x_\wedge i(x)(\ker_p^{q-2} x_\wedge), \tag{4.34}$$

$$i(x)(\ker_{p+1}^{q-1} x_\wedge) = i(x) x_\wedge I_p^{q-2} \oplus i(x) x_\wedge(\ker_p^{q-2} i(x)). \tag{4.35}$$

以上より,

$$\begin{aligned}S_p^q =& I_p^q \oplus x_\wedge I_{p-1}^{q-1} \oplus i(x) I_{p+1}^{q-1} \\ & \oplus x_\wedge i(x) I_p^{q-2} \oplus i(x) x_\wedge I_p^{q-2} \\ & \oplus x_\wedge i(x)(\ker_p^{q-2} x_\wedge) \oplus i(x) x_\wedge(\ker_p^{q-2} i(x)).\end{aligned} \tag{4.36}$$

ここで $I_p^q \oplus x_\wedge I_{p-1}^{q-1} \oplus i(x) I_{p+1}^{q-1}$ は調和であることは容易に確かめられる. 1 章で述べたように $S^q = H^q \oplus r^2 S^{q-2}$ であるので $S_p^q = H_p^q \oplus r^2 S_p^{q-2}$ となる. このとき調和でない部分 $r^2 S_p^{q-2}$ は

$$\begin{aligned}r^2 S_p^{q-2} &= (x_\wedge i(x) + i(x) x_\wedge) S_p^{q-2} \\ &= r^2 I_p^{q-2} \oplus x_\wedge i(x)(\ker_p^{q-2} x_\wedge) \oplus i(x) x_\wedge(\ker_p^{q-2} i(x)),\end{aligned} \tag{4.37}$$

となる. そこで (4.36) と (4.37) を比べると $x_\wedge i(x)(\ker_p^{q-2} x_\wedge) \oplus i(x) x_\wedge(\ker_p^{q-2} i(x))$ は調和でなく $x_\wedge i(x) I_p^{q-2} \oplus i(x) x_\wedge I_p^{q-2}$ は (harmonic part) $\oplus\, r^2 I_p^{q-2}$ と分解できることがわかる. 実際,

補題 4.4.

$$x_\wedge i(x)I_p^{q-2} \oplus i(x)x_\wedge I_p^{q-2} = h_p^{q-2}I_p^{q-2} \oplus r^2 I_p^{q-2}. \tag{4.38}$$

ここで, 写像 h_p^q は

$$h_p^q := (q+n-p)x_\wedge i(x) - (q+p)i(x)x_\wedge : S_p^q \to S_p^{q+2}, \tag{4.39}$$

と定義されるもので, I_p^q 上単射であり, その像 $h_p^q I_p^q$ は H_p^{q+2} の部分空間である.

以上より, 我々は q 次調和多項式 p-form H_p^q の分解を得る.

定理 4.5.

$$\begin{aligned} H_p^q = &\ker_p^q d \cap \ker_p^q d^* \\ &\oplus x_\wedge(\ker_{p-1}^{q-1} d \cap \ker_{p-1}^{q-1} d^*) \oplus i(x)(\ker_{p+1}^{q-1} d \cap \ker_{p+1}^{q-1} d^*) \\ &\oplus h_p^{q-2}(\ker_p^{q-2} d \cap \ker_p^{q-2} d^*). \end{aligned} \tag{4.40}$$

ここで各成分は互いに直交している. さらに

$$\ker_p^q d \cap H_p^q = \ker_p^q d \cap \ker_p^q d^* \oplus x_\wedge(\ker_{p-1}^{q-1} d \cap \ker_{p-1}^{q-1} d^*), \tag{4.41}$$

$$\ker_p^q d^* \cap H_p^q = \ker_p^q d \cap \ker_p^q d^* \oplus i(x)(\ker_{p+1}^{q-1} d \cap \ker_{p+1}^{q-1} d^*). \tag{4.42}$$

が成立する.

Proof. (4.40) は上の議論から従う. そこで(4.41) と(4.42) を示そう. $I_p^q \oplus x_\wedge I_{p-1}^{q-1}$ は $\ker_p^q d \cap H_p^q$ の部分空間であることは明らか. 逆に ϕ を $\ker_p^q d \cap H_p^q$ の元とすると, $d^*x_\wedge\phi + x_\wedge d^*\phi = (-q-n+p)\phi$ であり $d^*x_\wedge\phi$ が I_p^q に入り, $x_\wedge d^*\phi$ が $x_\wedge I_{p-1}^{q-1}$ に入ることがわかる. よって $\ker_p^q d \cap H_p^q = I_p^q \oplus x_\wedge I_{p+1}^{q-1}$. (4.42) も同様である. ■

この定理より調和多項式ド・ラーム複体の完全性が言える

系 4.6. (調和多項式に対するポアンカレの補題)
微分複体(4.16) 及び(4.17) は完全系列である.

Proof. 定理 4.5 より

$$\ker_p^q d \cap H_p^q = I_p^q \oplus x_\wedge I_{p-1}^{q-1}, \tag{4.43}$$

$$d(H_{p-1}^{q+1}) = d(i(x)I_p^q) \oplus d(h_{p-1}^{q-1}I_{p-1}^{q-1}) \tag{4.44}$$

である. さらに $d(i(x)I_p^q) = I_p^q$ であり $d(h_{p-1}^{q-1}I_{p-1}^{q-1}) = x_\wedge I_{p-1}^{q-1}$ となることが確かめられる. よって完全性が示せた. d^* についても同様に示せる. ■

5 分解の既約性について

3 章, 4 章で与えた分解は, 実は $Spin(n)$ の表現として既約分解を与える. 証明の方針は微分作用素 D, d, d^*, 代数的作用素 x, $x_\wedge$, $i(x)$ が $Spin(n)$ の作用と可換であることとを示し, 上で与えた分解の各成分の次元がある既約表現の次元と一致することを用いる. 詳しい証明は [8] を参照.

6 球面上のディラック作用素

この章では 3 章で与えた分解を使って, 球面上のディラック作用素の固有値問題を解く. この章の結果も詳しい証明は [8] を参照.

$\mathbf{R}^n$ 上のディラック作用素 D と区別するため, 球面上のディラック作用素を D_S と書くことにする.

$$D_S : L^2(S^{n-1}, \mathbf{S}(S^{n-1})) \to L^2(S^{n-1}, \mathbf{S}(S^{n-1})). \tag{6.1}$$

2 章で述べたようにスピノール束の section の空間はスピノール値調和多項式 $\sum H^q \otimes W_n$ と同一視できる. そこで $\sum H^q \otimes W_n$ 上で球面上のディラック作用素 D_S を記述することを考える. そしてその時 D と D_S の関係を調べよう.

命題 6.1. 同型 $L^2(\mathbf{S}(S^{2m})) \simeq \sum H^q \otimes W_{2m+1}$ 及び $L^2(\mathbf{S}(S^{2m-1})) \simeq \sum H^q \otimes W_{2m}^{\pm}$ のもとで, D_S は次のように表せる:

$$D_S = \frac{n-1}{2} + \sum_{1 \le k < l \le n} e_k e_l \left(x_k \frac{\partial}{\partial x_l} - x_l \frac{\partial}{\partial x_k} \right). \tag{6.2}$$

ここで $n = 2m$ の時は, クリフォード積 $e_k e_l$ は $\Delta^{\pm}_{2m*}(e_k e_l)$ のこと.

この命題より次の $\mathbf{R}^n$ 上のディラック作用素 D に対する極分解を得る.

$$D = \frac{x}{r^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - D_S + \frac{2m}{2} \right) \quad \text{on } \mathbf{R}^{2m+1}, \tag{6.3}$$

$$D^+ = \frac{x^+}{r^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - D_S + \frac{2m-1}{2} \right) \quad \text{on } \mathbf{R}^{2m}, \tag{6.4}$$

$$D^- = \frac{x^-}{r^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - D_S + \frac{2m-1}{2} \right) \quad \text{on } \mathbf{R}^{2m}. \tag{6.5}$$

さて, これら極分解を用いると D_S の固有値問題が解ける. $n = 2m+1$ の場合を考えよう ($n = 2m$ の場合も同様). まず 3 章の結果より,

$$L^2(\mathbf{S}(S^{2m})) \simeq \sum H^q \otimes W_{2m+1} \simeq \sum \ker_q D \oplus x \ker_{q-1} D. \tag{6.6}$$

そこで $\phi(x)$ を $\ker_q D$ の元とすると, 上の極分解より $D_S\phi - m\phi = q\phi$ が成立. すなわち ϕ は D_S の固有スピノールであり固有値は $q+m$ となる. またその重複度は $\dim \ker_q D$ に一致する. 同様に $x \ker_q D$ が固有値 $-(q+m)$ の固有スピノール空間となる. よって

定理 6.2. 球面S^{n-1}上のディラック作用素D_Sは固有値$\pm(q+\frac{n-1}{2})$ $(q \geq 0)$ を持ち, その重複度は

$$2^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{(n-1)+q-1}{q}. \tag{6.7}$$

7 Acknowledgement

この研究集会以降に, 岡山大の池田 章先生から定理4.5と同様の結果が, すでに得られているという御指摘を受けました (see [9]) . その論文では球面の微分形式上のラプラス作用素の固有値も計算されています.

参考文献

[1] M. F. Atiyah, R. Bott and A. Shapiro, *Clifford Modules,* Topology **3** (1964), 3-38.

[2] C. Bär, *The Dirac operator on homogeneous spaces and its spectrum on 3-dimensional lens spaces,* Arch. Math., **59** (1992), 65-79.

[3] C. Bär, *The Dirac operator on space forms of positive curvature,* J. Math. Soc. Japan., **48** (1996), 69-83.

[4] B. Booss-Bavnbek and K-P. Wojciechowski, *Elliptic boundary value problems for operators of Dirac type,* Birkhäuser Verlag, Basel-boston, 1993.

[5] R. Delanghe, F. Sommen and V. Souček, *Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions,* Kluwer Ac. Publishers, 1992.

[6] G. B. Folland *Harmonic analysis of the de Rham complex on the sphere,* J. reine angew. Math. , **398** (1989), 130-143.

[7] Y. Homma, *A representation of* $Spin(4)$ *on the eigenspinors of the Dirac operator on* 3*-dimensional sphere,* preprint, 1999.

[8] Y. Homma, *Spinor-Valued and Clifford Algebra-Valued Harmonic Polynomials,* preprint, 1999.

[9] A. Ikeda and Y. Taniguchi *Spectra and eigenforms of the Laplacian on* S^n *and* $P^n(\mathbf{C})$*,* Osaka J. Math. **15** (1978), no. 3, 515-546.

[10] H. B. Lawson and M. L. Michelsohn, *Spin Geometry,* Princeton Univ. Press, Princeton, 1989.

[11] A. Trautman, *The Dirac operator on hypersurfaces,* Acta Physica Polonica **B26** (1995), no. 7, 1283-1310.

[12] N. R. Wallach, *Harmonic analysis on homogeneous spaces,* Marcel Dekker, New York 1973.